ENACI

Cours de Mécanique rationnelle

Destiné aux étudiants de L1 Mécanique, BTP

Responsable du cours (titulaire) : CT. LISONGO SEMETE Gabriel

Contenu

Chapitre 1 — Notions de géométrie vectorielle
1.1 Scalaires et vecteurs
1.2 Algèbre vectorielle
1.3 Vecteurs unitaires
1.4 Composantes d'un vecteur
1.5 Produit scalaire
1.6 Produit vectoriel
1.7 Produit mixte et double

Chapitre 2 — Cinématique du point matériel
2.1 Référentiels et repères
2.2 Vitesse et accélération d'un point
2.3 Repère de Frenet
2.4 Étude de quelques mouvements
2.5 Mouvements relatifs et accélération de Coriolis

Chapitre 3 — Dynamique du point matériel
3.1 Lois de Newton
3.2 Théorème de la quantité de mouvement
3.3 Théorème du moment cinétique
3.4 Théorème de l'énergie cinétique

Chapitre 4 — Statique
4.1 Actions mécaniques et classification des forces
4.2 Moment d'une force et théorème de Varignon
4.3 Conditions d'équilibre
4.4 Stabilité des équilibres
4.5 Frottements
4.6 Réduction des systèmes de forces
4.7 Principe des travaux virtuels
4.8 Degrés de liberté, liaisons et coordonnées généralisées

Nombre de pages : 76 pages
Tirage des documents à chercher dans la littérature

Polycopié de cours — Année universitaire 2026–2027

Table des matières

Introduction générale **4**

1 Notions de géométrie et algèbre vectorielle **6**
1.1 Introduction . . . 6
1.2 Grandeurs scalaires et vectorielles . . . 6
1.3 Algèbre vectorielle . . . 8
1.3.1 Somme de deux vecteurs . . . 8
1.3.2 Produit d'un vecteur par un scalaire . . . 8
1.4 Vecteurs unitaires . . . 9
1.5 Composantes d'un vecteur dans un repère . . . 9
1.6 Produit scalaire . . . 10
1.6.1 Angle entre deux vecteurs et orthogonalité . . . 11
1.6.2 Produit scalaire par composantes . . . 11
1.7 Produit vectoriel . . . 12
1.7.1 Calcul par composantes dans un repère orthonormé direct . . . 12
1.8 Produit mixte et double produit vectoriel . . . 14
1.8.1 Produit mixte . . . 14
1.8.2 Double produit vectoriel (formule de BAC–CAB) . . . 15
1.9 Moment d'un vecteur . . . 16
1.9.1 Moment d'un vecteur par rapport à un point . . . 16
1.9.2 Moment d'un vecteur par rapport à un axe . . . 17
1.10 Synthèse et notations . . . 18
1.11 QCM de fin de chapitre . . . 19

2 Cinématique **22**
2.1 Référentiels et repères . . . 22
2.2 Vitesse et accélération d'un point . . . 23
2.2.1 Coordonnées cartésiennes . . . 24
2.2.2 Coordonnées polaires (mouvement plan) . . . 24
2.2.3 Coordonnées cylindriques . . . 25
2.2.4 Coordonnées sphériques . . . 25
2.3 Repère de Frenet (courbure et torsion) . . . 26
2.4 Étude de quelques mouvements . . . 28
2.4.1 Mouvement de translation . . . 28
2.4.2 Rotation autour d'un axe fixe . . . 28
2.4.3 Mouvement rigide général . . . 29
2.5 Mouvements relatifs et accélération de Coriolis . . . 29

3 Dynamique du point matériel **34**
3.1 Introduction . . . 34
3.2 Référentiel galiléen et hypothèses . . . 34
3.3 Les trois lois de Newton . . . 35
3.3.1 Première loi — principe d'inertie . . . 35
3.3.2 Deuxième loi — principe fondamental de la dynamique . . . 35
3.3.3 Troisième loi — principe d'action et de réaction . . . 36
3.4 Quantité de mouvement et théorème correspondant . . . 37
3.4.1 Définition de la quantité de mouvement . . . 37
3.4.2 Théorème de la quantité de mouvement . . . 37
3.4.3 Travail d'une force et puissance . . . 38
3.5 Moment cinétique et théorème du moment cinétique . . . 38
3.5.1 Moment d'une force et moment cinétique . . . 38
3.5.2 Théorème du moment cinétique . . . 39
3.5.3 Mouvement sous une force centrale : vitesse areolaire . . . 39
3.6 Théorème de l'énergie cinétique . . . 41
3.6.1 Énergie cinétique . . . 41
3.6.2 Théorème de l'énergie cinétique (principe des forces vives) . . . 41
3.7 Forces conservatives et énergie potentielle . . . 42
3.7.1 Force conservatrice et potentiel . . . 42
3.7.2 Énergie potentielle et conservation de l'énergie mécanique . . . 43
3.7.3 Exemples d'énergies potentielles . . . 44
3.7.4 Remarque sur les forces de liaison . . . 44
3.8 Exercices d'application supplémentaires . . . 44

4 Statique **49**
4.1 Introduction . . . 49
4.2 Actions mécaniques et classification des forces . . . 49
4.2.1 Notion d'action mécanique . . . 49
4.2.2 Classification des forces . . . 50
4.2.3 Modélisation des principales actions rencontrées . . . 51
4.3 Moment d'une force et théorème de Varignon . . . 51
4.4 Conditions d'équilibre . . . 52
4.4.1 Équilibre d'un point matériel . . . 52
4.4.2 Équilibre d'un système de forces (solide rigide) . . . 52
4.5 Types d'équilibre d'un solide (stabilité) . . . 54
4.5.1 Définitions . . . 54
4.5.2 Critère de l'énergie potentielle . . . 54
4.6 Frottements . . . 55
4.6.1 Frottement de glissement — lois de Coulomb . . . 55
4.6.2 Frottement de roulement . . . 56
4.7 Réduction classique d'un système de forces . . . 56
4.7.1 Définition du torseur mécanique . . . 56
4.7.2 Théorème de réduction . . . 57
4.7.3 Cas particuliers et interprétations . . . 57

4.7.4 Exemples numériques de réduction 57
4.8 Principe des travaux virtuels 58
4.8.1 Déplacement virtuel et travail virtuel 58
4.8.2 Principe des travaux virtuels pour l'équilibre 58
4.8.3 Applications 59
4.8.4 Lien avec le potentiel 60
4.9 Degrés de liberté, liaisons et coordonnées généralisées 60
4.9.1 Degrés de liberté 60
4.9.2 Liaisons et perte de degrés de liberté 60
4.9.3 Liaisons holonomes et non holonomes 61
4.9.4 Coordonnées généralisées et forces généralisées 61
4.10 Exercices d'application et solutions 62

Annexes détaillées **68**

Introduction générale

Présentation du cours

La *Mécanique Rationnelle* est le fondement scientifique de toute ingénierie mécanique et BTP. Elle étudie le mouvement des corps et les forces qui le produisent ou le modifient, en partant de principes généraux et rigoureux — d'où le qualificatif de « rationnelle » : rien n'est accepté par simple observation, tout est démontré à partir d'axiomes et de lois fondamentales.

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année (L1) en Mécanique et BTP. Il couvre les quatre premiers piliers de la discipline :

1. Notions de géométrie et algèbre vectorielle — pour le calcul des coordonnées, des azimuts et des distances
2. Cinématique du point — pour la compréhension des mouvements des mécanismes et des véhicules
3. Dynamique du point matériel — pour l'analyse des forces sur les structures et les mécanismes
4. Statique — pour l'équilibre des bâtiments, des ponts et des ouvrages

Chaque chapitre comporte un cours structuré (définitions, théorèmes, démonstrations, exemples), des exercices d'application et un questionnaire à choix multiples (QCM) avec corrigé détaillé. Des schémas vectoriels (dessinés en TikZ) illustrent les notions clés tout au long du document.

Pourquoi étudier la Mécanique Rationnelle ?

La mécanique rationnelle n'est pas une suite de formules à mémoriser. C'est un **langage et une méthode de pensée** qui permettent à l'ingénieur de :

— **Modéliser** un système physique réel (bâtiment, pont, véhicule, machine) en identifiant les corps, les liaisons et les forces en jeu ;

— **Prévoir** le mouvement et l'état de contrainte d'un ouvrage avant sa construction ;

— **Vérifier** la sécurité et la stabilité des structures et des mécanismes ;

— **Optimiser** la conception pour maîtriser les coûts, les masses et les consommations énergétiques.

Sans maîtrise de la mécanique rationnelle, l'ingénieur travaille à l'aveugle : il ne peut ni dimensionner un élément, ni anticiper une rupture, ni valider un comportement dynamique.

Applications dans la vie professionnelle de l'ingénieur

Les concepts de ce cours se retrouvent quotidiennement dans la pratique de l'ingénieur mécanique et BTP :

BTP et génie civil : Calcul des efforts dans les poutres, poteaux et treillis (statique) ; stabilité des ouvrages ; analyse des vibrations des bâtiments sous l'effet d'un séisme ou du vent (dynamique) ; comportement des dalles et voiles (systèmes de points et solides).

Cadastre et topographie : Calcul des coordonnées, des azimuts et des distances (géométrie vectorielle) ; relevés de terrains et implantations (statique) ; comportement des instruments et des véhicules de terrain (cinématique et dynamique).

Mécanique et conception de machines : Dimensionnement des arbres, engrenages, bielle-manivelle, volant d'inertie (cinématique et dynamique des solides) ; équilibrage des machines tournantes (moment cinétique, précession) ; robotique et mécanismes (coordonnées généralisées, Lagrange).

Aéronautique et automobile : Trajectoires et stabilité des véhicules (cinématique du point) ; tenue de route et comportement en choc (quantité de mouvement, choc) ; gouvernail et surfaces de portance (moments cinétiques et efforts aérodynamiques).

Énergies et industrie : Turbines, pompes (rotation autour d'un axe fixe, énergie cinétique de rotation) ; chaînes cinématiques et transmissions de puissance (mouvements relatifs, Coriolis).

Maintenance et expertise : Diagnostic de fissures et de déformations par compréhension des efforts transmis ; analyse des accidents mécaniques par reconstruction des mouvements et des forces.

En synthèse : ce cours vous donne les outils pour **concevoir, vérifier et optimiser** tout système matériel. C'est la base indispensable avant d'aborder la résistance des matériaux, la vibration, la fluidique ou toute discipline d'ingénierie appliquée.

1 Notions de géométrie et algèbre vectorielle

1.1 Introduction

La mécanique rationnelle est, avant toute chose, une science des grandeurs physiques qui possèdent à la fois une *magnitude* et une *direction* dans l'espace : les forces, les vitesses, les accélérations, les moments, etc. Pour les manipuler avec rigueur, il est indispensable de disposer d'un langage commun et précis : celui de l'algèbre vectorielle.

Ce premier chapitre a pour objet d'introduire les notions de base de la géométrie vectorielle dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{R}^3$. Il s'adresse aux étudiants de première année (L1) en Mécanique et en BTP. Aucune connaissance préalable en calcul vectoriel n'est supposée ; seules les bases de la géométrie du collège et du lycée sont requises.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 1.2, nous distinguons les grandeurs scalaires des grandeurs vectorielles et nous définissons la notion de vecteur (direction, sens, norme). La section 1.3 expose l'algèbre vectorielle proprement dite : somme de vecteurs, produit par un scalaire et leurs propriétés. La section 1.4 introduit les vecteurs unitaires. La section 1.5 traite des composantes d'un vecteur dans un repère cartésien orthonormé de l'espace. Les sections 1.6 à 1.8 sont consacrées aux trois produits fondamentaux : produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte, ainsi qu'au double produit vectoriel. Enfin, la section 1.9 introduit le moment d'un vecteur par rapport à un point et à un axe, notion centrale pour la statique et la dynamique des chapitres suivants.

Chaque notion s'accompagne de définitions, de théorèmes (avec démonstration lorsque celle-ci est accessible au niveau L1), d'exemples numériques et d'exercices d'application. Le chapitre se termine par un questionnaire à choix multiples (QCM) de cinq questions avec un corrigé détaillé.

1.2 Grandeurs scalaires et vectorielles

Commençons par distinguer deux familles de grandeurs physiques.

Définition 1.1 (Grandeur scalaire)**.** Une *grandeur scalaire* est une grandeur physique qui se caractérise uniquement par un nombre réel (sa mesure dans une unité donnée), éventuellement accompagné d'un signe. On dit qu'elle est entièrement déterminée par sa *valeur numérique*.

Exemple 1.2. La masse d'un corps ($m = 75$ kg), une température ($T = 20$ °C), une durée ($t = 12$ s), une énergie ou un volume sont des grandeurs scalaires. L'addition de deux grandeurs scalaires s'effectue par l'addition ordinaire des nombres réels.

Définition 1.3 (Grandeur vectorielle)**.** Une *grandeur vectorielle* est une grandeur physique qui ne peut être entièrement caractérisée par un nombre : il faut préciser, en plus de sa valeur numérique, une *direction* (la droite supportant la grandeur) et un *sens* (le sens dans lequel elle agit sur cette droite).

Exemple 1.4. Une force, une vitesse, une accélération, un moment de force sont des grandeurs vectorielles. Dire qu'une force de 10 N s'applique sur un point n'est pas suffisant : il faut préciser *quelle* force, *vers où* elle tire ou pousse, et *sur quelle* droite d'application elle agit.

Pour représenter une grandeur vectorielle, on introduit l'objet mathématique suivant.

Définition 1.5 (Vecteur)**.** Un *vecteur* dans l'espace est l'objet mathématique modélisant une grandeur vectorielle. Un vecteur est caractérisé par trois attributs :

(a) sa *norme* (ou module), nombre réel positif ou nul représentant son intensité ou sa grandeur ;

(b) sa *direction*, c'est-à-dire la droite (ou toute droite parallèle) sur laquelle il s'inscrit ;

(c) son *sens*, c'est-à-dire le sens dans lequel il pointe sur sa droite directrice.

On note $\mathbf{a}$ un vecteur et $\|\mathbf{a}\|$ (ou simplement a) sa norme.

On représente géométriquement un vecteur par une flèche ordonnée $\overrightarrow{AB}$: l'origine A est le point d'application, l'extrémité B est le terminus, la longueur du segment AB représente la norme (à une échelle choisie), la droite (AB) est la direction et le sens va de A vers B.

Définition 1.6 (Vecteur nul)**.** Le *vecteur nul*, noté $\mathbf{0}$, est le vecteur de norme nulle. Il n'a ni direction propre ni sens propre ; par convention, tout vecteur de nulle norme est égal au vecteur nul.

Définition 1.7 (Vecteurs égaux, opposés, collinéaires)**.** Deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont dits *égaux*, notés $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, s'ils ont même norme, même direction et même sens. Le vecteur *opposé* d'un vecteur $\mathbf{a}$ est noté $-\mathbf{a}$: il a la même norme et la même direction que $\mathbf{a}$, mais le sens contraire. Deux vecteurs sont dits *collinéaires* s'ils portent sur une même droite ou sur deux droites parallèles. Deux vecteurs non collinéaires sont dits *directeurs d'un plan* (ils déterminent un plan unique lorsqu'ils sont concourants en un point).

Remarque 1.8 (Vecteurs libres et vecteurs liés)**.** En mécanique, on distingue les *vecteurs libres* (seuls la norme, la direction et le sens comptent ; le point d'application est indifférent) des *vecteurs liés*, pour lesquels le point d'application joue un rôle physique (par exemple une force appliquée en un point d'un solide). Ce cours utilise principalement les vecteurs libres pour l'algèbre vectorielle, et réintroduit la notion de point d'application pour le moment (section 1.9).

Proposition 1.9 (Égalité de deux vecteurs)**.** *Deux vecteurs $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{b} = \overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ (éventuellement dégénéré) est un parallélogramme, c'est-à-dire si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Exemple 1.10 (Vecteurs égaux)**.** Dans la figure (à reconstituer), soient $A(1,2)$, $B(4,6)$, $C(2,1)$ et $D(5,5)$ dans le plan cartésien. Alors $\overrightarrow{AB} = (4-1,\ 6-2) = (3,4)$ et $\overrightarrow{CD} = (5-2,\ 5-1) = (3,4)$. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: les deux vecteurs sont égaux (même norme 5, même direction, même sens).

Exercice 1.11. Soient les points $A(1,0,2)$, $B(3,-1,4)$ et $C(-2,5,0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis du vecteur $\overrightarrow{BC}$, et vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Solution 1.1. On a $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1,\ -1-0,\ 4-2) = (2,-1,2)$. De même, $\overrightarrow{BC} = C - B = (-2-3,\ 5-(-1),\ 0-4) = (-5,6,-4)$. Enfin $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2-1,\ 5-0,\ 0-2) = (-3,5,-2)$. On vérifie : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (2-5,\ -1+6,\ 2-4) = (-3,5,-2) = \overrightarrow{AC}$. Cette relation est la *relation de Chasles* pour les vecteurs.

1.3 Algèbre vectorielle

L'algèbre vectorielle définit deux opérations fondamentales sur les vecteurs : la somme et le produit par un scalaire.

1.3.1 Somme de deux vecteurs

Définition 1.12 (Somme de deux vecteurs)**.** La *somme* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est le vecteur $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ défini par l'une des deux constructions équivalentes suivantes :

(a) *Règle du parallélogramme :* si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont concourants en une origine O, on complète le parallélogramme de côtés $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$; le vecteur somme est la diagonale issue de O.

(b) *Règle du triangle (ou de la polygonale) :* on place l'origine de $\mathbf{b}$ à l'extrémité de $\mathbf{a}$; le vecteur somme va de l'origine de $\mathbf{a}$ à l'extrémité de $\mathbf{b}$.

La somme de vecteurs possède les propriétés algébriques fondamentales.

Proposition 1.13 (Propriétés de la somme de vecteurs)**.** *Pour tous vecteurs* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$*, on a :*

(a) Commutativité : $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

(b) Associativité : $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

(c) Élément neutre : $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

(d) Élément opposé : $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Démonstration. La commutativité résulte de la règle du parallélogramme : la diagonale partant de l'origine commune est la même que l'on parte de $\mathbf{a}$ puis $\mathbf{b}$ ou de $\mathbf{b}$ puis $\mathbf{a}$. L'associativité résulte de la règle de la polygonale : le vecteur de l'origine du premier au terminus du dernier ne dépend pas de l'ordre de groupement. Les propriétés (c) et (d) découlent immédiatement de la définition du vecteur nul et du vecteur opposé. □

La *différence* de deux vecteurs se définit par $\mathbf{a}-\mathbf{b}:=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$. Géométriquement, si $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ et $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ sont concourants en O, alors $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$.

1.3.2 Produit d'un vecteur par un scalaire

Définition 1.14 (Produit d'un vecteur par un scalaire)**.** Soit $\mathbf{a}$ un vecteur et $\lambda\in\mathbb{R}$ un scalaire. Le *produit* $\lambda\mathbf{a}$ est le vecteur défini par :

(a) sa norme : $\|\lambda\mathbf{a}\|=|\lambda|\,\|\mathbf{a}\|$;

(b) sa direction : même direction que $\mathbf{a}$ si $\lambda\neq 0$;

(c) son sens : même sens que $\mathbf{a}$ si $\lambda>0$, sens contraire si $\lambda<0$.

Si $\lambda=0$ ou si $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, alors $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Proposition 1.15 (Propriétés du produit par un scalaire)**.** *Pour tous vecteurs* $\mathbf{a},\mathbf{b}$ *et tous scalaires* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$*, on a :*

(a) $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$ *(associativité) ;*

(b) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ *(distributivité par rapport à l'addition vectorielle) ;*

(c) $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ *(distributivité par rapport à l'addition scalaire) ;*

(d) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ *et* $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

Exemple 1.16. Soit $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ dans un repère orthonormé. Alors $2\mathbf{a} = (4, -2, 6)$, $-\mathbf{a} = (-2, 1, -3)$ et $\frac{1}{2}\mathbf{a} = (1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Exercice 1.17. Soient $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ et $\mathbf{v} = (-2, 0, 3)$. Calculer $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ et sa norme $\|\mathbf{w}\|$.

Solution 1.2. $2\mathbf{u} = (2, 4, -2)$ et $-3\mathbf{v} = (6, 0, -9)$. Donc $\mathbf{w} = (2+6,\ 4+0,\ -2-9) = (8, 4, -11)$. Sa norme est $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{8^2 + 4^2 + (-11)^2} = \sqrt{64 + 16 + 121} = \sqrt{201} \approx 14{,}18$.

1.4 Vecteurs unitaires

Définition 1.18 (Vecteur unitaire)**.** Un *vecteur unitaire* est un vecteur de norme égale à 1. Soit $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ un vecteur non nul. Le vecteur unitaire de même direction et même sens que $\mathbf{a}$, noté $\widehat{\mathbf{a}}$, se définit par

$$\widehat{\mathbf{a}} := \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}. \tag{1.1}$$

On dit qu'on *normalise* le vecteur $\mathbf{a}$.

Le vecteur $\widehat{\mathbf{a}}$ est parfois appelé *versor* de $\mathbf{a}$. Il porte l'information de direction et de sens de $\mathbf{a}$, débarrassée de son intensité. Toute décomposition d'un vecteur s'écrit alors $\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\ \widehat{\mathbf{a}}$.

Exemple 1.19. Soit $\mathbf{a} = (3, 4)$ dans le plan. Sa norme est $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Le vecteur unitaire de même sens est $\widehat{\mathbf{a}} = \frac{1}{5}(3, 4) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. On vérifie que $\|\widehat{\mathbf{a}}\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$.

Exercice 1.20. Soit $\mathbf{b} = (1, -2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$. Trouver le vecteur unitaire $\widehat{\mathbf{b}}$ de même sens que $\mathbf{b}$.

Solution 1.3. La norme de $\mathbf{b}$ est $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$. Par conséquent $\widehat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{3} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

1.5 Composantes d'un vecteur dans un repère

Pour effectuer des calculs concrets, il est commode de reporter les vecteurs sur un repère.

Définition 1.21 (Repère cartésien orthonormé de l'espace)**.** Un *repère cartésien orthonormé* de l'espace $\mathbb{R}^3$ est un ensemble $\mathcal{R} = (O; \widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}})$ où O est une origine et où $\widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}}$ sont trois vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux (orthonormés), définissant un sens direct de l'espace. On a

$$\widehat{\mathbf{i}} \cdot \widehat{\mathbf{j}} = \widehat{\mathbf{j}} \cdot \widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{i}} = 0, \qquad \left\|\widehat{\mathbf{i}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{j}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{k}}\right\| = 1. \tag{1.2}$$

Le repère est *direct* si $(\widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}})$ suit la règle de la main droite (voir section 1.7).

Tout point M de l'espace s'identifie à ses coordonnées (x, y, z) telles que $\overrightarrow{OM} = x\,\widehat{\mathbf{i}} + y\,\widehat{\mathbf{j}} + z\,\widehat{\mathbf{k}}$. Tout vecteur $\mathbf{a}$ s'identifie de même à ses *composantes* (a_x, a_y, a_z) dans le repère :

$$\mathbf{a} = a_x\,\widehat{\mathbf{i}} + a_y\,\widehat{\mathbf{j}} + a_z\,\widehat{\mathbf{k}}. \tag{1.3}$$

Si $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors ses composantes sont

$$a_x = x_B - x_A, \qquad a_y = y_B - y_A, \qquad a_z = z_B - z_A. \tag{1.4}$$

Les opérations vectorielles se traduisent simplement par composantes.

Proposition 1.22 (Opérations par composantes)**.** *Soient* $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *et* $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ *dans le repère* $\mathcal{R}$*, et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors :*

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$ *;*

(b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x,\ a_y - b_y,\ a_z - b_z)$ *;*

(c) $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$ *;*

(d) $\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$ *;*

(e) $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Démonstration. Ces résultats découlent immédiatement de la définition des opérations (vectorielle et scalaire) et de l'orthonormation des vecteurs de base. Par exemple, pour la norme, $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ puisque $\widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. □

Exemple 1.23 (Composantes et norme)**.** Soient $A(1, 2, 3)$ et $B(4, -1, 6)$. Le vecteur $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(4 - 1,\ -1 - 2,\ 6 - 3) = (3, -3, 3)$. Sa norme est $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Le vecteur unitaire de même sens est $\widehat{\mathbf{a}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(3, -3, 3) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Exercice 1.24. Soient $\mathbf{p} = (2, -1, 4)$ et $\mathbf{q} = (-1, 3, 2)$. Calculer $\mathbf{r} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ et $\|\mathbf{r}\|$.

Solution 1.4. $\mathbf{r} = (2, -1, 4) + 2(-1, 3, 2) = (2 - 2,\ -1 + 6,\ 4 + 4) = (0, 5, 8)$. La norme est $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} \approx 9{,}43$.

1.6 Produit scalaire

Le produit scalaire est l'opération qui permet de mesurer l'alignement de deux vecteurs et de définir l'angle entre eux.

Définition 1.25 (Produit scalaire — définition géométrique)**.** Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs de l'espace, et soit $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre leurs directions (mesuré après les avoir rendus concourants en une même origine). Le *produit scalaire* de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, noté $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (ou $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$), est le scalaire défini par

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{b}\| \cos\theta, \tag{1.5}$$

avec la convention $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Proposition 1.26 (Propriétés du produit scalaire)**.** *Pour tous vecteurs* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *et tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

(a) Symétrie : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

(b) Bilinéarité : $(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ *et* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

(c) Positivité : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0$, *et* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(d) Produit scalaire des vecteurs de base : $\widehat{\mathbf{i}} \cdot \widehat{\mathbf{i}} = \widehat{\mathbf{j}} \cdot \widehat{\mathbf{j}} = \widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{k}} = 1$ *et* $\widehat{\mathbf{i}} \cdot \widehat{\mathbf{j}} = \widehat{\mathbf{j}} \cdot \widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{i}} = 0$.

Démonstration. La symétrie est immédiate depuis la définition ($\cos\theta$ est symétrique). La bilinéarité résulte de la projection orthogonale : $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ est la projection de $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ sur $\mathbf{a}$ multipliée par $\|\mathbf{a}\|$, laquelle se décompose en somme des projections. La positivité est évidente puisque $\cos 0 = 1$. Enfin, les produits scalaires des vecteurs de base découlent de l'orthonormation. □

1.6.1 Angle entre deux vecteurs et orthogonalité

Comme corollaire immédiat, pour $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, l'angle θ entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ vérifie

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}, \qquad \text{donc} \qquad \theta = \arccos\!\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}\right). \tag{1.6}$$

Deux vecteurs non nuls $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont dits *orthogonaux* (ou perpendiculaires), notés $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, si l'angle entre leurs directions est droit ($\theta = \pi/2$). D'après la définition du produit scalaire, cela est équivalent à

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0. \tag{1.7}$$

Exemple 1.27 (Calcul d'angle)**.** Soient $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ et $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$. Le produit scalaire est $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 2\cdot 2 = 2 - 2 + 4 = 4$. Les normes sont $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$ et $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$. Donc $\cos\theta = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9}$, d'où $\theta = \arccos(4/9) \approx 63{,}6°$.

Exemple 1.28 (Orthogonalité)**.** Les vecteurs $\mathbf{p} = (1, 2, -2)$ et $\mathbf{q} = (2, 1, 2)$ sont orthogonaux car $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 2 + 2 - 4 = 0$.

1.6.2 Produit scalaire par composantes

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire se calcule simplement.

Proposition 1.29 (Produit scalaire par composantes)**.** *Soient* $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *et* $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ *dans un repère cartésien orthonormé. Alors*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.8}$$

Démonstration. En développant $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\widehat{\mathbf{i}} + a_y\widehat{\mathbf{j}} + a_z\widehat{\mathbf{k}})\cdot(b_x\widehat{\mathbf{i}} + b_y\widehat{\mathbf{j}} + b_z\widehat{\mathbf{k}})$ et en utilisant l'orthonormation de $(\widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}})$, tous les termes croisés s'annulent et il reste $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. □

Théorème 1.30 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** *Pour tous vecteurs* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *d'un espace euclidien,*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|, \tag{1.9}$$

avec égalité si et seulement si $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *sont colinéaires.*

Démonstration. Si l'un des vecteurs est nul, l'inégalité est triviale. Sinon, posons $f(t) = \|\mathbf{a} + t\mathbf{b}\|^2 \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En développant, $f(t) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2t(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + t^2\|\mathbf{b}\|^2$. Ce polynôme du second degré en t est toujours positif ou nul, donc son discriminant est ≤ 0 : $\Delta = 4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 - 4\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \leq 0$, d'où $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2$. L'égalité a lieu si et seulement si f admet une racine double, c'est-à-dire si $\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{0}$ pour un certain t, autrement dit si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires. □

Exemple 1.31 (Vérification de Cauchy–Schwarz)**.** Soient $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$. On a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4 + 10 + 18 = 32$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$ et $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{16+25+36} = \sqrt{77}$. Le produit des normes vaut $\sqrt{14\cdot 77} = \sqrt{1078} \approx 32{,}83$, on a bien $|32| \leq 32{,}83$. L'inégalité est vérifiée (inégalité stricte car les vecteurs ne sont pas colinéaires).

Exercice 1.32. Soient $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ et $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$.

(a) Calculer $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ et en déduire si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux.

`[Figure à reconstituer : règle de la main droite pour` $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$`]`

(b) Calculer l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (à l'arrondi près du degré).

Solution 1.5. (a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 0$; donc $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$: ils sont orthogonaux. (b) Les normes sont $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3}$ et $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$. Ainsi $\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0$, d'où $\theta = \arccos(0) = 90°$, conformément à l'orthogonalité trouvée.

1.7 Produit vectoriel

Le produit scalaire donne un scalaire ; le produit vectoriel, lui, donne un vecteur. Il est essentiel en mécanique pour définir les moments et les rotations.

Définition 1.33 (Produit vectoriel — définition géométrique)**.** Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs non colinéaires, et soit $\theta\in[0,\pi]$ l'angle entre leurs directions. Leur *produit vectoriel*, noté $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, est le vecteur défini par :

(a) sa norme : $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta$ (c'est l'aire du parallélogramme de côtés $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$) ;

(b) sa direction : perpendiculaire au plan portant $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$;

(c) son sens : donné par la *règle de la main droite* — si l'on fait tourner $\mathbf{a}$ vers $\mathbf{b}$ par l'angle le plus petit ($\leq\pi$), le pouce de la main droite, dans le sens de rotation, pointe dans le sens de $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires (dont le cas de l'un nul), alors $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Proposition 1.34 (Propriétés du produit vectoriel)**.** *Pour tous vecteurs* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *et tout scalaire* $\lambda\in\mathbb{R}$ *:*

(a) Anticommutativité : $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

(b) Auto-produit nul : $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(c) Distributivité : $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

(d) Produit par un scalaire : $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$.

(e) Non-associativité : *en général* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Démonstration. L'anticommutativité et l'auto-produit nul découlent de $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ et $\sin 0 = 0$. La distributivité est une propriété géométrique classique (projection des aires). L'associativité ne tient pas : on en donne un contre-exemple dans le paragraphe suivant (double produit vectoriel). □

1.7.1 Calcul par composantes dans un repère orthonormé direct

Dans un repère cartésien orthonormé *direct* $(\widehat{\mathbf{i}},\widehat{\mathbf{j}},\widehat{\mathbf{k}})$, les produits vectoriels des vecteurs de base sont :

$$\widehat{\mathbf{i}}\times\widehat{\mathbf{j}} = \widehat{\mathbf{k}}, \qquad \widehat{\mathbf{j}}\times\widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\mathbf{i}}, \qquad \widehat{\mathbf{k}}\times\widehat{\mathbf{i}} = \widehat{\mathbf{j}}, \tag{1.10}$$

et, par anticommutativité,

$$\widehat{\mathbf{j}}\times\widehat{\mathbf{i}} = -\widehat{\mathbf{k}}, \qquad \widehat{\mathbf{k}}\times\widehat{\mathbf{j}} = -\widehat{\mathbf{i}}, \qquad \widehat{\mathbf{i}}\times\widehat{\mathbf{k}} = -\widehat{\mathbf{j}}. \tag{1.11}$$

Proposition 1.35 (Produit vectoriel par composantes)**.** *Soient* $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *et* $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$. *Alors* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (c_x, c_y, c_z)$ *avec*

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x. \tag{1.12}$$

Équivalemment, sous forme de déterminant,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

Démonstration. On développe $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\widehat{\mathbf{i}} + a_y\widehat{\mathbf{j}} + a_z\widehat{\mathbf{k}}) \times (b_x\widehat{\mathbf{i}} + b_y\widehat{\mathbf{j}} + b_z\widehat{\mathbf{k}})$ en utilisant la bilinéarité et les neuf produits vectoriels des vecteurs de base (dont les trois auto-produits sont nuls). On obtient directement les formules de c_x, c_y, c_z, qui s'écrivent compactement sous forme de déterminant. □

Exemple 1.36 (Calcul de produit vectoriel)**.** Soient $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{b} = (4, -1, 2)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1))\,\widehat{\mathbf{i}} - (1 \cdot 2 - 3 \cdot 4)\,\widehat{\mathbf{j}} + (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4)\,\widehat{\mathbf{k}} \\ &= (4 + 3)\,\widehat{\mathbf{i}} - (2 - 12)\,\widehat{\mathbf{j}} + (-1 - 8)\,\widehat{\mathbf{k}} \\ &= 7\,\widehat{\mathbf{i}} + 10\,\widehat{\mathbf{j}} - 9\,\widehat{\mathbf{k}} \\ &= (7, 10, -9). \end{aligned}$$

Vérification de l'orthogonalité : $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot (-9) = 7 + 20 - 27 = 0$, et $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 4 \cdot 7 + (-1) \cdot 10 + 2 \cdot (-9) = 28 - 10 - 18 = 0$. Le produit vectoriel est bien orthogonal à $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Exercice 1.37. Soient $\mathbf{u} = (2, 0, -1)$ et $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$.

(a) Calculer $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Vérifier que le résultat est orthogonal à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{v}$.

(c) Calculer l'aire du parallélogramme de côtés $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Solution 1.6. (a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (0\cdot2-(-1)\cdot3)\,\widehat{\mathbf{i}}-(2\cdot2-(-1)\cdot1)\,\widehat{\mathbf{j}}+(2\cdot3-0\cdot1)\,\widehat{\mathbf{k}} = (3,\ -5,\ 6)$. (b) $\mathbf{u} \cdot (3, -5, 6) = 6 + 0 - 6 = 0$ et $\mathbf{v} \cdot (3, -5, 6) = 3 - 15 + 12 = 0$: orthogonalité vérifiée. (c) L'aire est $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 25 + 36} = \sqrt{70} \approx 8{,}37$.

1.8 Produit mixte et double produit vectoriel

1.8.1 Produit mixte

Définition 1.38 (Produit mixte)**.** Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ trois vecteurs de l'espace. Leur *produit mixte*, noté $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ou $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, est le scalaire défini par

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{1.14}$$

Le produit mixte a une interprétation géométrique fondamentale : sa valeur absolue $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|$ est égale au volume du parallélépipède d'arêtes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ issus d'un même sommet. Il est nul si et seulement si les trois vecteurs sont *coplanaires* (soit linéairement dépendants).

Proposition 1.39 (Propriétés du produit mixte)**.** *Pour tous vecteurs* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *:*

(a) Invariance par permutation circulaire : $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

(b) Antisymétrie par transposition : $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]$ *(et similairement en échangeant deux quelconques des vecteurs).*

(c) Dans un repère orthonormé direct, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ *est égal au déterminant de la matrice dont les lignes (ou colonnes) sont les composantes de* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *:*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.15}$$

Démonstration. (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (produit triple scalaire), ce qui donne l'invariance circulaire. (b) Découle de l'anticommutativité du produit vectoriel. (c) Écrivons $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ par composantes puis faisons le produit scalaire avec $\mathbf{a}$; on retrouve le développement du déterminant selon la première ligne. □

Exemple 1.40 (Produit mixte et volume)**.** Soient $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$. Alors $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \widehat{\mathbf{j}} \times \widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$. Donc $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1$. Le volume du parallélépipède (qui est ici le cube unité) vaut $|1| = 1$.

Exemple 1.41 (Vecteurs coplanaires)**.** Soient $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$ et $\mathbf{c} = (7, 8, 9)$. Calculons le déterminant :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0. \tag{1.16}$$

Le produit mixte est nul : les trois vecteurs sont coplanaires. En effet, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ou plus simplement les trois vecteurs sont linéairement dépendants ($\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$).

Exercice 1.42. Soient $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 4)$ et $\mathbf{c} = (5, 6, 0)$.

(a) Calculer le produit mixte $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

(b) Déduire le volume du parallélépipède d'arêtes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Solution 1.7. $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (1\cdot 0 - 4\cdot 6)\,\widehat{\mathbf{i}} - (0\cdot 0 - 4\cdot 5)\,\widehat{\mathbf{j}} + (0\cdot 6 - 1\cdot 5)\,\widehat{\mathbf{k}} = (-24,\, 20,\, -5)$. Puis $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (1,2,3)\cdot(-24,20,-5) = -24+40-15 = 1$. Le volume du parallélépipède est $|[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]| = |1| = 1\ \mathrm{u}^3$.

1.8.2 Double produit vectoriel (formule de BAC–CAB)

Le double produit vectoriel $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ est un vecteur. Comme $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ est orthogonal au plan $(\mathbf{a},\mathbf{b})$, le vecteur $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, orthogonal à $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, appartient au plan $(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Il s'exprime donc comme une combinaison linéaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Théorème 1.43 (Formule de BAC–CAB)**.** *Pour tous vecteurs* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *de l'espace,*

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}. \tag{1.17}$$

Démonstration. Le vecteur $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ est orthogonal à $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, donc il est dans le plan $(\mathbf{b},\mathbf{c})$ (orthogonal à la normale de ce plan). Écrivons-le donc $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \alpha\,\mathbf{b} + \beta\,\mathbf{c}$. En posant $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|}$ (unitaire normale au plan $(\mathbf{b},\mathbf{c})$), on a $\mathbf{a}\times\mathbf{e}$ orthogonal à $\mathbf{a}$ et à $\mathbf{e}$, donc dans le plan $(\mathbf{b},\mathbf{c})$ et orthogonal à $\mathbf{e}$. En comparant les composantes dans une base orthonormée adaptée, on trouve $\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ et $\beta = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, ce qui donne la formule. Une preuve algébrique par composantes donne le même résultat : développer $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ par composantes et utiliser l'identité $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ conduit à la formule ci-dessus. □

La relation duale s'écrit, en permutant,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}. \tag{1.18}$$

Notons que, en général, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$: le produit vectoriel n'est pas associatif.

Exemple 1.44 (Vérification de la formule de BAC–CAB)**.** Soient $\mathbf{a} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$ et $\mathbf{c} = (0,0,1)$. Calculons $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$: $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \widehat{\mathbf{j}}\times\widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, donc $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \widehat{\mathbf{i}}\times\widehat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$. Par la formule de BAC–CAB : $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} = (1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1)\,\mathbf{b} - (1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0)\,\mathbf{c} = 0\cdot\mathbf{b} - 0\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Les deux côtés coïncident.

Exercice 1.45. Soient $\mathbf{a} = (1,2,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,1)$ et $\mathbf{c} = (1,0,1)$. Vérifier la formule de BAC–CAB en calculant $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ de deux manières : directement, et par la formule $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$.

Solution 1.8. Directement : $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot 1 - 1\cdot 0,\ 1\cdot 1 - 0\cdot 1,\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1) = (1,1,-1)$.
Ensuite $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (1,2,0)\times(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2\cdot(-1) - 0\cdot 1,\ 0\cdot 1 - 1\cdot(-1),\ 1\cdot 1 - 2\cdot 1) =$ $(-2,\ 1,\ -1)$. Par la formule : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 1 = 1$ et $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1 = 2$. Donc $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} = 1\cdot(0,1,1) - 2\cdot(1,0,1) = (0,1,1) - (2,0,2) = (-2,1,-1)$. Les deux résultats coïncident : $(-2,1,-1)$.

1.9 Moment d'un vecteur

Le moment d'un vecteur est la notion qui mesure la « tendance de rotation » qu'un vecteur (typiquement une force) engendre autour d'un point ou d'un axe. Il est au cœur de la statique et de la dynamique (théorème du moment cinétique, chapitre 3).

1.9.1 Moment d'un vecteur par rapport à un point

Définition 1.46 (Moment d'un vecteur par rapport à un point)**.** Soit $\mathbf{v}$ un vecteur lié appliqué en un point M, et soit O un point de l'espace appelé *centre des moments* ou *pôle*. Le *moment* du vecteur $\mathbf{v}$ par rapport au point O, noté $\mathbf{M}_O(\mathbf{v})$ (ou parfois $\overrightarrow{M}_O$), est le vecteur produit vectoriel

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{v}) := \overrightarrow{OM} \times \mathbf{v}, \tag{1.19}$$

où $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position du point d'application M par rapport à O.

Le moment $\mathbf{M}_O(\mathbf{v})$ est orthogonal au plan défini par $\overrightarrow{OM}$ et $\mathbf{v}$. Sa norme vérifie

$$\|\mathbf{M}_O(\mathbf{v})\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta = d \, \|\mathbf{v}\| \,, \tag{1.20}$$

où θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\mathbf{v}$ et où $d = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \sin\theta$ est la distance du point O à la droite d'action de $\mathbf{v}$ (le *bras de levier*).

Proposition 1.47 (Propriétés du moment)**.** *Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ deux vecteurs liés, $\lambda \in \mathbb{R}$, et O un point fixe.*

(a) $\mathbf{M}_O(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{u}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{v})$ *(linéarité, théorème de Varignon pour un système de deux vecteurs).*

(b) $\mathbf{M}_O(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{M}_O(\mathbf{v})$.

(c) Si le point d'application M se déplace le long de la droite d'action de $\mathbf{v}$ (glissement du vecteur sur sa droite), le moment $\mathbf{M}_O(\mathbf{v})$ ne change pas.

(d) Si O et M sont confondus ($O = M$), alors $\mathbf{M}_O(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Démonstration. (a) $\mathbf{M}_O(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \overrightarrow{OM} \times (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \overrightarrow{OM} \times \mathbf{u} + \overrightarrow{OM} \times \mathbf{v}$ par distributivité du produit vectoriel. (b) Découle de $(\lambda\overrightarrow{OM}) \times \mathbf{v}$ ou $\overrightarrow{OM} \times (\lambda\mathbf{v})$. (c) Si M glisse sur sa droite d'action, $\overrightarrow{OM}$ varie d'un vecteur collinéaire à $\mathbf{v}$; le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \times \mathbf{v}$ dépend seulement de la composante de $\overrightarrow{OM}$ orthogonale à $\mathbf{v}$, c'est-à-dire du bras de levier, qui est invariant. (d) Immédiat car $\overrightarrow{OM} = \mathbf{0}$. □

Exemple 1.48 (Moment d'une force)**.** Une force $\mathbf{F} = (0, 0, -10)$ N (une masse suspendue) s'applique au point $M(3, 4, 0)$ m. Le moment par rapport à l'origine $O(0, 0, 0)$ est

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \overrightarrow{OM} \times \mathbf{F} = (3, 4, 0) \times (0, 0, -10). \tag{1.21}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}(3,4,0)\times(0,0,-10) &= \begin{vmatrix}\widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}}\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{vmatrix}\\ &= (4\cdot(-10)-0\cdot 0)\,\widehat{\mathbf{i}} - (3\cdot(-10)-0\cdot 0)\,\widehat{\mathbf{j}} + (3\cdot 0-4\cdot 0)\,\widehat{\mathbf{k}}\\ &= (-40,\ 30,\ 0)\ \mathrm{N\,m}.\end{aligned}$$

Le moment est horizontal, orthogonal au plan vertical contenant la force, et sa norme est $\sqrt{40^2+30^2}=50$ N m. Le bras de levier est ici la distance de O à la droite verticale passant par M, soit $\sqrt{3^2+4^2}=5$ m, et 5 m × 10 N = 50 N m, conformément.

1.9.2 Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Définition 1.49 (Moment par rapport à un axe)**.** Soit (Δ) une droite de l'espace dirigée par le vecteur unitaire $\widehat{\mathbf{e}}$, et soit O un point quelconque de (Δ). Le *moment scalaire* d'un vecteur $\mathbf{v}$ (lié en M) par rapport à l'axe (Δ) est la projection de son moment vectoriel $\mathbf{M}_O(\mathbf{v})$ sur l'axe :

$$M_{(\Delta)}(\mathbf{v}) := \mathbf{M}_O(\mathbf{v})\cdot\widehat{\mathbf{e}} = (\overrightarrow{OM}\times\mathbf{v})\cdot\widehat{\mathbf{e}} = [\overrightarrow{OM},\mathbf{v},\widehat{\mathbf{e}}], \tag{1.22}$$

c'est-à-dire le produit mixte des trois vecteurs. Ce moment scalaire est indépendant du choix du point O sur l'axe (Δ).

Interprétation : $M_{(\Delta)}(\mathbf{v})$ mesure la tendance de rotation du vecteur autour de l'axe (Δ). Sa valeur absolue est le couple engendré autour de l'axe ; son signe donne le sens de rotation (selon l'orientation de $\widehat{\mathbf{e}}$ et la règle de la main droite).

Exemple 1.50 (Moment par rapport à un axe)**.** Reprenons l'exemple précédent : $\mathbf{F} = (0,0,-10)$ N appliqué en $M(3,4,0)$. L'axe Δ est l'axe des z, dirigé par $\widehat{\mathbf{e}} = \widehat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$, et l'origine $O(0,0,0)$ appartient à Δ. On a déjà $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = (-40,30,0)$ N m. Le moment scalaire par rapport à l'axe des z est

$$M_{(z)}(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F})\cdot\widehat{\mathbf{k}} = (-40,30,0)\cdot(0,0,1) = 0\ \mathrm{N\,m}. \tag{1.23}$$

La force étant parallèle à l'axe des z, elle n'engendre aucun moment autour de cet axe (elle tend à le traduire, non à le faire tourner).

Exercice 1.51. Une force $\mathbf{F} = (6,-2,3)$ N s'applique au point $M(1,2,-1)$ m.

(a) Calculer le moment vectoriel $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ par rapport à l'origine $O(0,0,0)$.

(b) Calculer le moment scalaire par rapport à l'axe des x (dirigé par $\widehat{\mathbf{i}} = (1,0,0)$).

Solution 1.9. (a) $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = (1,2,-1)\times(6,-2,3) = \begin{vmatrix}\widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}}\\ 1 & 2 & -1\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix} = (2\cdot 3-(-1)(-2),\ (-1)\cdot 6 - 1\cdot 3,\ 1\cdot(-2)-2\cdot 6) = (6-2,\ -6-3,\ -2-12) = (4,\ -9,\ -14)$ N m. (b) Moment par rapport à l'axe des x : $M_{(x)}(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F})\cdot\widehat{\mathbf{i}} = (4,-9,-14)\cdot(1,0,0) = 4$ N m.

1.10 Synthèse et notations

Pour clore ce chapitre, voici un récapitulatif des principales notations et formules introduites.

Notion	Symbole / Formule	Remarque
Norme d'un vecteur $\mathbf{a}$	$\|\mathbf{a}\|$	≥ 0
Vecteur unitaire	$\widehat{\mathbf{a}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$	$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
Somme	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	composantes : $(a_x + b_x, \dots)$
Produit scalaire	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\theta$	$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Produit vectoriel	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\perp$ au plan $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
Norme du produit vectoriel	$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = ab\sin\theta$	aire du parallélogramme
Produit mixte	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	$=$ |volume parallélépipède|
BAC–CAB	$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$	
Moment par rapport à O	$\mathbf{M}_O(\mathbf{v}) = \overrightarrow{OM} \times \mathbf{v}$	$\mathbf{v}$ lié en M
Moment scalaire par rapport à un axe (Δ)	$M_{(\Delta)}(\mathbf{v}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{v}) \cdot \widehat{\mathbf{e}}$	indépendant de $O \in (\Delta)$

Remarque 1.52. Ce chapitre fournit le langage vectoriel dont les chapitres suivants (cinématique, dynamique, statique) feront un usage constant. En particulier, le produit vectoriel sera utilisé pour définir le moment cinétique et le moment d'une force, et le produit scalaire pour le travail et la puissance.

Application en cadastre — Levés topographiques et coordonnées

En topographie et en cadastre, chaque point du terrain est repéré par ses coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) dans un repère lié au système de référence géodésique (par exemple le système UTM pour la zone concernée). Un déplacement entre un point station A et un point cible B se modélise par le vecteur $\overrightarrow{AB} = (X_B - X_A,\ Y_B - Y_A,\ Z_B - Z_A)$. La distance horizontale D entre les deux points s'obtient par la norme de la projection horizontale :

$$D = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}. \tag{1.24}$$

L'azimut α (angle mesuré depuis le nord vers l'est, dans $[0, 2\pi[$) se calcule à partir des composantes horizontales :

$$\alpha = \operatorname{atan2}(X_B - X_A,\ Y_B - Y_A), \qquad \overrightarrow{AB}_h = (X_B - X_A,\ Y_B - Y_A,\ 0). \tag{1.25}$$

où $\operatorname{atan2}(\Delta E, \Delta N)$ lève l'ambiguïté de quadrant, que ne permet pas le seul produit scalaire avec le vecteur nord $\widehat{\mathbf{n}} = (0, 1, 0)$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}_h \cdot \widehat{\mathbf{n}}}{\left\|\overrightarrow{AB}_h\right\|}. \tag{1.26}$$

Le produit scalaire permet ainsi de projeter un vecteur de levé sur une direction de référence (nord, est, ou alignement de bornes existantes).

L'orthogonalité est fondamentale pour vérifier la qualité d'un levé : deux directions de mesure sont perpendiculaires si leur produit scalaire est nul, ce qui permet de détecter des erreurs d'angle dans un réseau de points de bornage.

Exercice 1.53 (Application cadastre — Calcul d'azimut)**.** Deux bornes cadastrales A et B ont pour coordonnées $A(1000{,}0,\ 2000{,}0,\ 450{,}0)$ et $B(1030{,}0,\ 2040{,}0,\ 452{,}0)$ (en mètres, système UTM). Calculer :

(a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et sa norme (distance 3D entre les bornes).

(b) La distance horizontale D_{AB}.

(c) L'azimut α de la droite AB par rapport au nord.

Solution 1.10. (a) $\overrightarrow{AB} = (30{,}0,\ 40{,}0,\ 2{,}0)$. Sa norme : $\sqrt{30^2+40^2+2^2} = \sqrt{900+1600+4} = \sqrt{2504} \approx 50{,}04$ m.

(b) Distance horizontale : $D_{AB} = \sqrt{30^2+40^2} = \sqrt{900+1600} = 50{,}0$ m.

(c) Composante horizontale : $\overrightarrow{AB}_h = (30{,}0,\ 40{,}0,\ 0)$. Vecteur nord $\widehat{\mathbf{n}} = (0,1,0)$. Produit scalaire : $\overrightarrow{AB}_h \cdot \widehat{\mathbf{n}} = 40{,}0$. Norme : $\left\|\overrightarrow{AB}_h\right\| = 50{,}0$. Donc $\cos\alpha = 40/50 = 0{,}8$, d'où $\alpha = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}87°$. L'azimut de B vu de A est d'environ $36{,}9°$ (mesuré depuis le nord vers l'est).

1.11 QCM de fin de chapitre

Questionnaire à choix multiples

Q1. Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ est nul si et seulement si :

(a) $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires de même sens ;

(b) $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont orthogonaux ;

(c) l'un des deux vecteurs est nul ;

(d) $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$.

Q2. Le produit vectoriel $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ est :

(a) un scalaire égal à $ab\cos\theta$;

(b) un vecteur de norme $ab\sin\theta$ orthogonal au plan $(\mathbf{a},\mathbf{b})$;

(c) un vecteur de norme $ab\cos\theta$ dans le plan $(\mathbf{a},\mathbf{b})$;

(d) toujours égal au vecteur nul.

Q3. Dans un repère orthonormé direct, $\widehat{\mathbf{i}}\times\widehat{\mathbf{j}}$ vaut :

(a) $\widehat{\mathbf{k}}$;

(b) $-\widehat{\mathbf{k}}$;

(c) $\mathbf{0}$;

(d) $\widehat{\mathbf{i}}$.

Q4. Le produit mixte $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$ est nul si et seulement si :

(a) les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux ;

(b) les trois vecteurs sont coplanaires (linéairement dépendants) ;

(c) au moins deux des vecteurs sont colinéaires ;

(d) les trois vecteurs ont la même norme.

Q5. Le moment d'un vecteur $\mathbf{v}$ (lié en M) par rapport à un point O se définit par :

(a) $\overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{v}$ (un scalaire) ;